998. Vector Lattice ノ表現

前田　文友
小笠原藤次郎（廣島文理大）

Vector lattice ノ表現ニツイテハ，スデニ我國ニ於テ多クノ人々ニヨツテ論ゼラレテ居ルノデアルガ，コゝデハ F. Wecken[1] ノ characteristic family ヲ用フル比較的初等的ナ方法ヲ述ベタイト思フ。

§1. ニ於テハ unit ヲ有スル vector lattice L ヲ考ヘ，L ノ principal ideal ノ全体 P ハ distributive lattice ヲナシ，L ノ要素ニ對應スル characteristic family ハ principal ideal ノ列 $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ デアルカラ，P ヲ Wallman ノ方法デ集合族ニ表現スルトキハ，$\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ ハ單調ニ増加スル集合列ニ表現サレル。

コレカラ点函數ヲ作レバ，L ハ連續函數ノ族ニ linear-lattice-homomorphic ニ表現サレル。コレガ isomorphic デイルタメニハ，L ガ Archimedean デナケレバナラヌコトヲ述ベル。

§2 ニ於テハ unit ノ存在ヲ假定シナイ Archimedean vector lattice L ヲ考ヘ，L ノ normal ideal ノ全体 N ハ complete Boolean algebra ヲナシ，L ノ要素ニ對應スル characteristic family ハ normal ideal ノ列ニナル。コノ N ヲ

§1ノ如ク表現スルコトニヨリテ，Lノ表現ヲ求メル。

§3ニ於テハ σ-complete 或ハ complete vector lattice Lヲ考ヘル。

コノトキハ上ノ方法デ唯ノ vector lattice トシテハ表現出来ルガ，ソレガ σ-complete 或ハ complete vector lattice トシテ lattice-isomorphic デアルトハ云ヘナイ．故ニココデハ Lノ要素ヲ値ニ持ツ measure ノ概念ヲ導入シテ，measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，成立スルコトヲ示ス。

但シ§2ト§3トハソノ概略ヲ示スニ止メタ。

§1. Lヲ vector lattice トスル．即チLハ實數ヲ係數トスル linear space デアッテ，順序 $x \geqq y$ ヲ $x-y \geqq 0$ デ定義スルトキ，Lハ lattice ヲ作ッテ居ル．コノトキLハ distributive デアッテ，尚

$$(x \vee y)+z=(x+z) \vee (y+z),$$

$$(x \wedge y)+z=(x+z) \wedge (y+z)$$

ガ成立スル． $x_+=x \vee 0$, $x_-=-(x \wedge 0)$, $|x|=x_++x_-$ ト定義スル．コノトキ $x=x_+-x_-$ デアル。

$x, y \in L$ トスル．モシ $|x| \wedge |u|=0$ ナルスベテノ u ニ對シテ $|y| \wedge |u|=0$ デアルトキハ $y < x$ ト書ク．$y < x$, $x < y$ ガ同時ニ成立スルトキハ $x \sim y$ ニテ示ス．スベテ

前頁脚註

(1) F. Wecken, Abstrakte Integrale and fast periodische Functionen, Math. Zeit 45 (1939), 382

ノ $x\in L$ ニ對シテ $x<e$ ナルガ如キ $e>0$ ガ存在スルトキハ，e ヲ L ノ <u>unit</u> ト云フ。$e\wedge|x|=0$ ナルトキハ $x=0$ デアル。

補助定理 1.1 (i) $x\sim|x|$，$x\sim\lambda x$ $(\lambda\neq 0)$

(ii) $x, y\geqq 0$ ナルトキハ $x\vee y\sim x+y$

(証) (i) $x\sim|x|$ ハ定義カラ明ラカデアル。今 $|x|\wedge|u|=0$ ナル u ヲトリ，$|\lambda x|\wedge|u|=y$ トオク。$|\lambda x|\geqq y$，$|\lambda u|\geqq|\lambda|y$ デアルカラ $|\lambda|(|x|\wedge|u|)\geqq y\wedge|\lambda|y\geqq 0$ 故ニ $y=0$。即チ $\lambda x<x$．λ ノ代ニ $\frac{1}{\lambda}$ ヲオケバ $x<\lambda x$．故ニ $x\sim\lambda x$．

(ii) ハ $x\vee y\leqq x+y=x\vee y+x\wedge y\leqq 2(x\vee y)$ カラ明リデアル。

L ノ sublattice $\mathfrak{a}$ ニ於テ，$x\in\mathfrak{a}$，$y<x$ ナルトキ常ニ $y\in\mathfrak{a}$ デアルトキハ $\mathfrak{a}$ ヲ L ノ <u>ideal</u> デアルト云フ．ideal ハ linear デアルコトハ補助定理 1.1 ヲ用ヒテ容易ニ証明シ得ル．H ヲ L ノ部分集合トスルトキ，H' ヲ H ノスベテノ要素 y ニ對シテ $|x|\wedge|y|=0$ ナルガ如キ x ノ集合トスル．H' ガ ideal デアルコトモ容易ニワカル。

$x\in L$ ガ與ヘラレタルトキ $y<x$ ヲ満足スル y ノ集合 $\mathfrak{a}(x)$ ハ ideal デアル．コレヲ <u>principal ideal</u> ト云フ．補助定理 1.1 カラ $\mathfrak{a}(x)=\mathfrak{a}(|x|)$ デアル．故ニ今後ハ $\mathfrak{a}(x)$ トカケバ $x\geqq 0$ ナルモノト約束スル．

<u>補助定理 1.2</u> $\mathfrak{a}(x)\vee\mathfrak{a}(y)=\mathfrak{a}(x\vee y)=\mathfrak{a}(x+y)$，

$\mathfrak{a}(x) \wedge \mathfrak{a}(y) = \mathfrak{a}(x \wedge y)$

（証） $\mathfrak{a}(x) \leqq \mathfrak{a}(x \vee y)$, $\mathfrak{a}(y) \leqq \mathfrak{a}(x \vee y)$ ハ明ラカデアル. $\mathfrak{a}(x) \leqq \mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}(y) \leqq \mathfrak{a}(z)$ ナレトキハ $x < z$, $y < z$ デアル. 今 $z \wedge |u| = 0$ トスレバ

$(x \vee y) \wedge |u| = (x \wedge |u|) \vee (y \wedge |u|) = 0$ 故ニ $x \vee y < z$. 即チ $\mathfrak{a}(x \vee y) \leqq \mathfrak{a}(z)$ 故ニ $\mathfrak{a}(x \vee y)$ ハ $\mathfrak{a}(x)$ ト $\mathfrak{a}(y)$ トノ join デアル。

又 補助定理1.1 ヨリ $\mathfrak{a}(x \vee y) = \mathfrak{a}(x + y)$

$\mathfrak{a}(x) \geqq \mathfrak{a}(x \wedge y)$, $\mathfrak{a}(y) \geqq \mathfrak{a}(x \wedge y)$ ハ明ラカデアル. $\mathfrak{a}(x) \geqq \mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}(y) \geqq \mathfrak{a}(z)$ トスレバ $x > z$, $y > z$ デアル. 今 $x \wedge y \wedge |u| = 0$ トナルトキハ $x > z$ ナレバ $z \wedge y \wedge |u| = 0$.

シカルニ $y > z$ ナレバ $z \wedge z \wedge |u| = 0$. 即チ $z \wedge |u| = 0$ 故ニ $x \wedge y > z$. 従ッテ $\mathfrak{a}(x \wedge y) \geqq \mathfrak{a}(z)$. 故ニ $\mathfrak{a}(x \wedge y)$ ガ $\mathfrak{a}(x)$ ト $\mathfrak{a}(y)$ トノ meet デアル。

定理1.1 vector lattice L ノ principal ideal ノ全体 $\mathbf{P}$ ハ distributive lattice デアル。

（証） 補助定理1.2 カラ $\mathbf{P}$ ハ lattice ヲ作リ, 尚 L ガ distributive デアルコトカラ $\mathbf{P}$ モ distributive ナルコトガワカル。

以後本節ニ於テハ L ハ unit e ヲ有スルモノト仮定スル. 任意ノ $x \in L$ ニ対シテ $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}((x - \lambda e))$ トオクトキ, $(\mathfrak{a}_\lambda ; -\infty < \lambda < \infty)$ ヲ x ノ characteristic family ト云フ。

補助定理1.3. x ノ characteristic family ヲ $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ トシ, 尚 $t_\lambda^{(x)} = \mathfrak{a}((x-\lambda e)_+)$ トオクトキハ, 次ノコトガ成立スル。

(i) $\lambda < \mu$ ナルトキハ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \leqq \mathfrak{a}_\mu^{(x)}$

(ii) $\lambda < \mu$ ナルトキハ $t_\lambda^{(x)} \vee \mathfrak{a}_\mu^{(x)} = L$

(iii) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \wedge t_\lambda^{(x)} = \mathfrak{o}$ (1)

(iv) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \vee \mathfrak{a}_\mu^{(y)} \geqq \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)}$

(v) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \wedge \mathfrak{a}_\lambda^{(y)} = \mathfrak{a}_\lambda^{(x \vee y)}$

(証) (i) 定義ヨリ明ラカデアル。

(ii) $\lambda < \mu$ ナルトキハ

$$(x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_- = (x-\lambda e) \vee 0 + (-x+\mu e) \vee 0$$
$$= (\mu-\lambda)e \vee (x-\lambda e) \vee (-x+\mu e) \vee 0$$
$$\geqq (\mu-\lambda)e$$

故ニ補助定理1.2ヲ用フレバ

$$\mathfrak{a}((x-\lambda e)_+) \vee \mathfrak{a}((x-\mu e)_-) = \mathfrak{a}((x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_-)$$
$$\geqq \mathfrak{a}((\mu-\lambda)e) = L$$

(iii) $(x-\lambda e)_- \wedge (x-\lambda e)_+ = 0$。

カラ明ラカデアル。

(iv) $$(x-\lambda e)_- + (y-\mu e)_- = (\lambda e - x) \vee 0 + (\mu e - y) \vee 0$$
$$= ((\lambda+\mu)e-(x+y)) \vee (\lambda e - x) \vee (\mu e - y) \vee 0$$
$$\geqq ((\lambda+\mu)e-(x+y)) \vee 0 = (x+y-(\lambda+\mu)e)_-$$

---

(1) $\mathfrak{o}$ ハ 0 ノミカラナル ideal

カラ成立スル。

$$(\text{v})\quad (x\vee y-\lambda e)_- = ((x-\lambda e)\vee(y-\lambda e))_-$$
$$= (x-\lambda e)_- \wedge (y-\lambda e)_-$$

カラ成立スル。

P ハ *distributive lattice* デアルカラ，コレヲ *Wallman* ノ方法ニヨッテ表現スル。[1] 先ヅ P ハ *Wallman* ノ所謂 *disjunction property* ヲ満足スル。即チ $\mathfrak{a}(x), \mathfrak{a}(y)$ ヲ P ノ相異ナル二要素トスルトキハ，$\mathfrak{a}(x)\wedge\mathfrak{a}(z), \mathfrak{a}(y)\wedge\mathfrak{a}(z)$ ノ何レカガ θ ナル如キ $\mathfrak{a}(z)$ ガ存在スル．ソレハ例ヘバ $\mathfrak{a}(x)\neq\mathfrak{a}(y)$ ナルトキハ，$x\nleq y$ デアルカラ $y\wedge z=0$, $x\wedge z\neq 0$ ナル $z>0$ ガ存在スル。ソノトキ $\mathfrak{a}(z)$ ガ求ムルモノデアル。

P ノ *maximal additive ideal* $\mathfrak{J}^*$ ノ全体ヲ Ω トスル．$\mathfrak{a}\in$ P ニ對シテ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム *maximal additive ideal* ノ全体ヲ $\mathfrak{a}^*$ ニテアラハストキハ，P ハ $\mathfrak{a}^*$ ノ如キ集合ノ族 P^* ニヨッテ *lattice-isomorphic* ニ表現サレル．今 P^* ヲ底トスルガ如ク Ω ヲ位相化スルトキハ，Ω ハ *totally-disconnected* デアッテ $\mathfrak{a}^*$ ハ開集合ニシテ同時ニ閉集合デアル。

コノトキ *characteristic family* $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ ハ Ω ニ於ケル集合族 $\{\mathfrak{a}_\lambda^*\}$ ニ寫サレル．$\{\mathfrak{a}_\lambda^*\}$ カラ次ノ如

---

(1) H. Wallman, Lattices and Topological spaces, Annals of Math. 39 (1938), 112–126

クシテ点函数 $f(\mathfrak{p}^*)$ ヲ作ル。

$$f(\mathfrak{p}^*)=g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_\lambda^*)=l.u.b.(\lambda;\ \mathfrak{p}^*\notin\mathfrak{a}_\lambda^*)$$

コヽデ $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_\lambda^*$ 及ビ $\mathfrak{p}^*\notin\mathfrak{a}_\lambda^*$ ハ，前ノ表現ノ方法ニヨリ，夫々 $\mathfrak{a}_\lambda\in\mathfrak{p}^*$ 及ビ $\mathfrak{a}_\lambda\notin\mathfrak{p}^*$ ト同一ノコトヲ意味スル．λ ノ如何ニ関ラズ $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_\lambda^*$ ナルトキハ $f(\mathfrak{p}^*)=-\infty$ デアリ，又 λ ノ如何ニ関ラズ $\mathfrak{p}^*\notin\mathfrak{a}_\lambda^*$ ナルトキハ $f(\mathfrak{p}^*)=+\infty$ デアル。

補助定理1.4．$x\in L$ ノ characteristic family ヲ $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ トシ，コレニ對應スル点函数ヲ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ニテ表ハストキハ次ノコトガ成立スル。

(i) $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ連續函数デアル。

(ii) x ガ 0 ノトキハ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ恒等的ニ 0 デアル。

(iii) $f_{-x}(\mathfrak{p}^*)=-f_x(\mathfrak{p}^*)$

(iv) $f_{\mu x}(\mathfrak{p}^*)=\mu f_x(\mathfrak{p}^*)$

(v) $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*)=f_x(\mathfrak{p}^*)+f_y(\mathfrak{p}^*)$

(vi) $f_{x\vee y}(\mathfrak{p}^*)=max[f_x(\mathfrak{p}^*),\ f_y(\mathfrak{p}^*)]$

(vii) $f_{x\wedge y}(\mathfrak{p}^*)=min[f_x(\mathfrak{p}^*),\ f_y(\mathfrak{p}^*)]$

〔証〕(i) 今 $f(\mathfrak{p}_0^*)=\lambda_0$（有限）ナルトキハ $\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*-\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*$ ハ $\mathfrak{p}_0^*$ ヲ含ム開集合デアッテ，$\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_{\lambda_0+\varepsilon}^*-\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*$ ナルトキ $|f(\mathfrak{p}^*)-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ デアル。

故ニ $f(\mathfrak{p}^*)$ ハ $\mathfrak{p}_0^*$ デ連続デアル。又 $f(\mathfrak{p}_0^*)=+\infty$ ナル

トキハ，$\Omega-\mathfrak{a}^*_\lambda$ ハ $\mathfrak{p}^*_0$ ヲ含ム開集合ニシテ，$\mathfrak{p}^*\in\Omega-\mathfrak{a}^*_\lambda$ ナルトキハ $f(\mathfrak{p}^*)\geqq\lambda$. $f(\mathfrak{p}^*_0)=-\infty$ ノトキモ同様ニ云ヘル。

(ii) $x=0$ ノトキハ

$$\mathfrak{a}^{(x)}_\lambda=\mathfrak{a}((1-\lambda e)_-)=\begin{cases} L & \lambda>0 \text{ ノトキ} \\ \theta & \lambda\leqq 0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

ナルコトカラ明ラカデアル。

(iii) $\mathfrak{a}^{(-x)}_\lambda=\mathfrak{a}((-x-\lambda e)_-)=\mathfrak{a}((x+\lambda e)_+)$ ニシテ，補助定理1.3 (ii) ヨリ

$\mu<\lambda$ ナルトキハ

$$\mathfrak{a}((x+\lambda e)_+)\vee\mathfrak{a}((x+\mu e)_-)=L \qquad (1)$$

今 $f_{-x}(\mathfrak{p}^*)=g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}^{(-x)}_\lambda\in\mathfrak{p}^*)=\lambda_0$ (有限) トスル。任意ノ $\mu<\lambda_0$ ニ對シテ $\mu<\lambda<\lambda_0$ ナル λ ヲトレバ $\mathfrak{a}((x+\lambda e)_+)\notin\mathfrak{p}^*$. 故ニ (1) ヨリ
$\mathfrak{a}((x+\mu e)_-)\in\mathfrak{p}^*$.
從ッテ $f_x(\mathfrak{p}^*)=g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}((x-\lambda e)_-)\in\mathfrak{p}^*)\leqq-\mu$
$\mu\to\lambda_0$ ナラシメレバ

$$f_x(\mathfrak{p}^*)\leqq-\lambda_0 \qquad (2)$$

次ニ任意ノ $\mu>\lambda_0$ ニ對シテ $\lambda_0<\mu<\lambda$ ナル λ ヲトレバ $\mathfrak{a}((x+\lambda e)_-)\in\mathfrak{p}^*$. 故ニ (1) ヨリ $\mathfrak{a}((x+\mu e)_-)\notin\mathfrak{p}^*$
從ッテ $f_x(\mathfrak{p}^*)\geqq-\mu$. $\mu\to\lambda_0$ ナラシメレバ

$$f_x(\mathfrak{p}^*)\geqq-\lambda_0 \qquad (3)$$

故ニ $f_x(\mathfrak{p}^*)=-\lambda_0=-f_{-x}(\mathfrak{p}^*)$. 次ニ $f_{-x}(\mathfrak{p}^*)=\infty$ ノトキハ (2) ヲ証明シタ様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*)\leqq-\infty$. 即

$f_x(\mathfrak{p}^*) = -\infty$. 又 $f_{-x}(\mathfrak{p}^*) = -\infty$ ノトキハ (3) ヲ証明シタ様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*) = \infty$

(iv) (ii), (iii) カラ $\mu > 0$ ノトキヲ証明スレバヨイ。コノトキハ

$$\mathfrak{a}_\lambda^{(\mu x)} = \mathfrak{a}\left((\mu x - \lambda e)_-\right) = \mathfrak{a}\left(\left(x - \frac{\lambda}{\mu} e\right)_-\right) = \mathfrak{a}_{\frac{\lambda}{\mu}}^{(x)}$$

カラ成立スル。

(v) 先 $f_x(\mathfrak{p}^*) = \lambda_0$, $f_y(\mathfrak{p}^*) = \mu_0$ が共ニ有限トスル。$\lambda < \lambda_0$, $\mu < \mu_0$ ナル任意ノ λ, μ ヲトルトキハ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \not\subset \mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{a}_\mu^{(y)} \not\subset \mathfrak{p}^*$. 故ニ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \vee \mathfrak{a}_\mu^{(y)} \not\subset \mathfrak{p}^*$.(1)

従ッテ補助定理 1.3 (iv) ヨリ $\mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)} \not\subset \mathfrak{p}^*$. 即チ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq \lambda + \mu$. 従ッテ

$$f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq f_x(\mathfrak{p}^*) + f_y(\mathfrak{p}^*) \qquad (4)$$

(4) ハ x, y ノ代リニ $-x$, $-y$ ヲ入レタルトキモ成立スルカラ

$$f_{-x-y}(\mathfrak{p}^*) \geqq f_{-x}(\mathfrak{p}^*) + f_{-y}(\mathfrak{p}^*)$$

故ニ (iii) カラ $$f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) = f_x(\mathfrak{p}^*) + f_y(\mathfrak{p}^*) \qquad (5)$$

次ニ $f_x(\mathfrak{p}^*) = +\infty$, $f_y(\mathfrak{p}^*) = \mu_0$ (有限) ナリト

---

(1) maximal additive ideal ハ prime additive ideal デアル. (Wallman, 上掲, P. 116, 脚註)

スル。$\lambda < +\infty$, $\mu < \mu_0$ ナル任意ノ λ, μ ヲトルトキハ上ノ如クシテ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq \lambda + \mu$. 故ニ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) = +\infty$ ヨッテ (5) ガ成立スル。同様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*)$, $f_y(\mathfrak{p}^*)$ ノ一方ガ $+\infty$, 他方ガ $-\infty$ ノ場合以外ハ (5) ガ成立スルコトガ証明出来ル。

(vi) 補助定理 1.3 (v) ヨリ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x \vee y)} = \mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \wedge \mathfrak{a}_\lambda^{(y)}$ 故ニ

$$
\begin{aligned}
f_{x \vee y}(\mathfrak{p}^*) &= g.l.b.\,(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \wedge \mathfrak{a}_\lambda^{(y)} \in \mathfrak{p}^*) \\
&= \max[g.l.b.\,(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \in \mathfrak{p}^*),\ g.l.b.\,(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda^{(y)} \in \mathfrak{p}^*)] \\
&= \max[f_x(\mathfrak{p}^*),\ f_y(\mathfrak{p}^*)]
\end{aligned}
$$

(vii) ハ (iii) 及ビ (vi) カラ成立スル。

定理 1.2　unit ヲ有スル vector lattice L ハ totally-disconnected ナル空間 Ω ニ於テ定義セラレタ連續函数ノ族 L^* ニヨッテ linear-lattice-homomorphic ニ表現サレル。

(証)　$(f_x(\mathfrak{p}^*);\ x \in L)$ ヲ L^* ニテアラハストキハ補助定理 1.4 ヨリコノ定理ハ成立スル。

但シ $x \vee y$ ニ對應スル函数ハ $\max[f_x(\mathfrak{p}^*), f_y(\mathfrak{p}^*)]$, 即チ一点 $\mathfrak{p}^*$ ニ於ケル $f_x(\mathfrak{p}^*)$, $f_y(\mathfrak{p}^*)$ ノ大ナル方ヲ値ニトル函数デアル. 故ニ委シク云ヘバ, Ω ニ於テ定義セラレタルアラユル点函数ノ全体 F^* ヲ考へ, $f, g \in F^*$ ナルトキ, $f \geqq g$ ヲスベテノ点 $\mathfrak{p}^*$ ニ於テ $f(\mathfrak{p}^*) \geqq g(\mathfrak{p}^*)$ ガ成立スルコトニヨリテ定義スルトキハ, F^* ハ一ツノ vector lattice デアル. コノ定理ハ L^* ヲコノ F^* ノ vector *sublattice* ト考ヘテムト *lattice-homomorphic* デアルコトヲ意味スル。

補助定理 1.5. x ノ表現 $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ恒等的ニ0ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ，スベテノ $\lambda>0$ ニ対シテ $|x|<\lambda e$ ガ成立スルコトデアル。

(証) コノ表現ハ *linear-homomorphic* デアッテ $x=x_+-x_-$ デアルカラ，$x\geqq 0$ ノ場合ヲ考ヘレバ充分デアル. シカルニ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ恒等的ニ 0 ナルタメニハ

$$\alpha_\lambda^{(x)}=\alpha((x-\lambda e)_-)=\begin{cases} L & \lambda>0 \text{ ナルトキ} \\ 0 & \lambda\leqq 0 \text{ ナルトキ}\end{cases}$$

ナルコトガ必要且ツ充分デアル. シカルニ $\alpha((x-\lambda e)_-)$ ハ $\alpha((x-\lambda e)_+)=0$ デアルカラ $\lambda>0$ ノトキ $\alpha((x-\lambda e)_-)=L$ ナルコトハ $\alpha((x-\lambda e)_+)=\theta$，即 $(x-\lambda e)_+=0$，即 $x\leqq\lambda e$ ナルコトト同等デアル。

定理 1.3 スベテノ $\lambda>0$ ニ對シテ $|x|<\lambda e$ ナルガ如キ x ノ集合ヲ N トスルトキハ，L^* ハ L/N ニ *linear-lattice-isomorphic* デアル。

(証) N ハ *normal subspace* ヲ作ル. Birkhoff, *Lattice theory* P.109 カラ，コレハ一ツノ *linear-lattice-homomorphism* ヲ決定スルが，補助定理 1.5 カラ，コレハ $L\to L^*$ ニ外ナラナイ. 故ニ L/N ト L^* トハ *linear-lattice-isomorphic* デアル。

定理 1.3 ノ *isomorphism* $L/N\longleftrightarrow L^*$ ニ於テ，

L/N ノ中ノ二ツノ異ナル要素 x, y ノ L^* ニ於ケル表現 $f_x(\mathfrak{p}^*)$, $f_y(\mathfrak{p}^*)$ ガ何レモ恒等的ニ $+\infty$ デアルトキハ, $x \neq y$ ナルニ関ラズ, $f_x(\mathfrak{p}^*) = f_y(\mathfrak{p}^*)$ ナルコトガアリ得ル。(局部的ニ無限大ノ値ヲトル場合デモ, カヽル場合ガ起ル) コレハ $\infty - \infty$ ガ不定デアルコトカラ出テ来ル。次ニ述ベルガ如ク, L ヲ Archimedean ニスレバ, コレガ除カレルノミナラズ, $L \longrightarrow L^*$ ガ isomorphism ニナル. ソレヲ考ヘル前ニ若干ノ注意ヲ与ヘル.

E ヲ L ノ部分集合トスルトキハ, 一般ニハ $\bigvee_{x\in E} x$ ガ存在スルトハ限ラナイガモシコレガ存在スルトキハ

$$\bigvee_{x\in E} x + y = \bigvee_{x\in E}(x+y), \quad \bigwedge_{x\in E} x + y = \bigwedge_{x\in E}(x+y),$$

$$\bigvee_{x\in E} x \wedge u = \bigvee_{x\in E}(x\wedge u), \quad \bigwedge_{x\in E} x \vee u = \bigwedge_{x\in E}(x\vee u)$$

ガ成立スルコトハ容易ニ証明シ得ル. 次ニ極限ノ概念ヲ拡張スル。

$\{x_\delta\}$ ヲ L ノ要素ノ directed set トスル. モシ x 及ビ二ツノ directed set $\{u_\delta\}$, $\{w_\delta\}$ ガ存在シ

(i) スベテノ δ ニ対シテ $u_\delta \leqq x_\delta \leqq w_\delta$

(ii) $\delta < \delta'$ ナルトキハ $u_\delta \leqq u_{\delta'}$, $w_{\delta'} \leqq w_\delta$ ニシテ $\bigvee_\delta u_\delta$ 及ビ $\bigwedge_\delta w_\delta$ ガ存在シ

$$\bigvee_\delta u_\delta = x = \bigwedge_\delta w_\delta$$

ガ成立スルトキ $x_\delta \rightarrow x$ ニテアラハス.

カク極限ノ概念ヲ定義スルトキハ $x_\delta \rightarrow x$ ナルトキ

$x_\delta \vee y \to x \vee y$, $x_\delta \wedge y \to x \wedge y$, $\lambda x_\delta \to \lambda x$,
$x_\delta + y \to x + y$

ガ成立スルコトハ容易ニ証明シ得ル。

vector lattice L ニ於テ，スベテノ $x \in L$ ニ対シテ，$\lambda \to 0$ ナルトキ $\lambda x \to 0$ デアルトキハ L ハ <u>Archimedean</u> デアルト云フ。

補助定理 1.6　L ガ Archimedean vector lattice ナルトキ，x ノ characteristic family ヲ $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ トスレバ　$\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = \theta$ デアル。[1]

(証)　$\lambda < 0$ ノ如何ニ関ラズ $z \in \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}((x-\lambda e)_-)$ ナル $z \geqq 0$ ガ存在スルトセバ $z < (x-\lambda e)_-$．故ニ $z \wedge (x-\lambda e)_+ = 0$．即チスベテノ $\lambda < 0$ ニ対シテ $z \wedge (\frac{x}{\lambda} - e)_- = 0$．$\lambda \to -\infty$ ナラシメレバ $z \wedge e = 0$．故ニ $z = 0$．従ッテ $\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = 0$．

定理 1.4.　L ガ unit e ヲ有スル Archimedean vector lattice ナルトキハ，L ハ L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル．又任意ノ $x \in L$ ニ対シテ $f_x(\mathfrak{q}^*)$ ガ無限大ナル点 $\mathfrak{q}^*$ ノ集合ハ非稠密デアル。

(証)　L ガ Archimedean ナレバ $N = \theta$ デアルカラ，定理ノ前半ハ定理 1.3 カラ明カデアル．後半ヲ証明スルニハ，今 $f_x(\mathfrak{q}^*) = -\infty$ トスル．即チ λ ノ如何ニ関ラ

---

(1)　尚　$\bigvee_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = L$ ガ成立スル．

故ニ $\mathfrak{a}_\lambda \in \mathfrak{q}^*$ デアル。$\mathfrak{a}(y) \in \mathfrak{q}^*$ ナル任意ノ principal ideal $\mathfrak{a}(y)$ ヲトルトキハ，補助定理1.6カラ相當ニ小ナル $\lambda_0 < 0$ ヲトレバ $\mathfrak{a}(y) \neq \mathfrak{a}_{\lambda_0} = \mathfrak{a}((x-\lambda_0 e)_-)$ 即チ $y \notin (x-\lambda_0 e)_-$。故ニ $(x-\lambda_0 e)_- \wedge z = 0$, $y \wedge z \neq 0$ ナル $z > 0$ ガ存在スル。$\mathfrak{a}(y)$, $\mathfrak{a}(z)$ ヲ含ム maximal additive ideal ヲ $\mathfrak{p}^*$ トスルトキハ $\mathfrak{a}_{\lambda_0} = \mathfrak{a}((x-\lambda_0 e)_-) \notin \mathfrak{p}^*$.
故ニ $f_x(\mathfrak{p}^*) = l.u.b.\ (\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda \notin \mathfrak{p}^*) \geqq \lambda_0$。
即チ $\mathfrak{q}^*$ ノ任意ノ近傍 $\mathfrak{a}^*(y)$ ニハ $f_x(\mathfrak{p}^*) \neq -\infty$ ナルガ如キ点 $\mathfrak{p}^*$ ガ存在スル。從ッテ $f_x(\mathfrak{q}^*) = -\infty$ ナルガ如キ点 $\mathfrak{q}^*$ ノ集合ハ非稠密デアル。x ノ代リニ $-x$ ヲ考ヘレバ，$f_x(\mathfrak{q}^*) = \infty$ ナル点 $\mathfrak{q}^*$ ノ集合ニツイテモ同様ニ云ヒ得ル。

$f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ連續函數デアルカラ，コノ定理ニヨリ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ノ値ハ函數値ガ有限ナル点ニヨッテ定マル。故ニ前ニ述ベタ ∞ ノ場合ノ不明瞭ガ除カレル。

§2. 次ニ unit ノ存在ヲ假定シナイ vector lattice L ノ表現ヲ考ヘル。前節カラワカル様ニ，isomorphic ナ表現ヲ得ルタメニハ，L ハ Archimedean デナケレバナラナイ。ソレデコノ節デハ始カラ L ハ Archimedean デアルト假定スル。ソウデナイトキハ L/N ヲ考ヘレバヨイ。

L ノ ideal $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$ ヲ滿足スルトキ，$\mathfrak{a}$ ヲ <u>normal ideal</u> ト云フ。principal ideal ハ

normal デアル。

定理2.1. L ノ normal ideal ノ全体 N ハ complete Boolean algebra デアル.

アマリ長クナルカラ以下証明ハ省略スルガ, コノ定理ヲ証明スルニ必要ナ次ノ補助定理ダケヲ証明シテオカウ。

補助定理 2.1 $\mathfrak{a}$ ヲ ideal トシ, $y>0$ トスル. モシ y ガ集合 $(y\wedge x;\ x\in\mathfrak{a})$ ノ l.u.b. デナイトキハ, $(y\wedge x;\ x\in\mathfrak{a})$ ノ任意ノ upper bound $y_1<y$ ヲトレバ, $y-y_1\in\mathfrak{a}'$ デアル.

(証) モシ $y-y_1\notin\mathfrak{a}'$ トスレバ $(y-y_1)\wedge x\neq 0$. $x\in\mathfrak{a}$ ナル $x>0$ ガ存在スル。$u=(y-y_1)\wedge x$ トオケバ, $u\in\mathfrak{a}$ ナレバ y_1 ノ定義カラ $y_1\geqq y\wedge u=u$. 他方 $y-y_1\geqq u$ ナレバ, $y\geqq y_1+u\geqq 2u$. 又 $2u\in\mathfrak{a}$ ナレバ, y_1 ノ定義ヨリ $y_1\geqq y\wedge 2u=2u$. 故ニ $y\geqq u+2u=3u$. コレヲ繰リ返ヘセバ, スベテノ n ニ対シテ $y\geqq nu$. シカルニ L ハ Archimedean ナレバ $u=0$. コレ $u>0$ ニ矛盾スル。故ニ $y-y_1\in\mathfrak{a}'$

超限帰納法ヲ用フレバ, L ハ principal ideal $\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ ノ直和ニ分解セラレル。即チ $\alpha\neq\beta$ ナルトキ $e^{(\alpha)}\wedge e^{(\beta)}=0$ ニシテ, $L=\bigvee_{\alpha}\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ デアル.

$x\in L$ ガ與ヘラレタルトキ, $\mathfrak{a}_\lambda=\bigvee_{\alpha}\{\mathfrak{a}((x-\lambda e^{(\alpha)})_-)\wedge\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\}$ トオクトキハ, normal ideal ノ列 $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ ヲ得ル. コレヲ x ノ <u>characteristic family</u> ト云フ. コノ characteristic family

ハ§1ニ定義シタ characteristic family ト全ク同一ノ性質ヲ有スルコトガ証明出来ル．従ッテ L ノ表現ヲ得ルタメニハ，Boolean algebra N ニ Wallman ノ表現方法ヲ適用スル。即チ N ニ於ケル maximal additive ideal $\mathfrak{Z}^*$ ノ全体ヲ Ω トシ，$\mathfrak{a}\in$ N ニ対シテ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム $\mathfrak{Z}^*$ ノ全体ヲ $\mathfrak{a}^*$ ニテアラハストキハ N ハ $\mathfrak{a}^*$ ノ如キ集合ノ族 N^* ニヨッテ isomorphic ニ表現セラレル．今 N^* ヲ底トスルが如ク Ω ヲ位相化スルトキハ，Ω ハ totally disconnected bicompact space デアッテ，$\mathfrak{a}^*$ ハ bicompact ナ開集合デアル。（N ハ Boolean algebra デアルカラ maximal additive ideal ト prime additive ideal トハ同一ノモノデアリ，$\mathfrak{Z}^*$ ノ補集合ハ N ノ prime ideal デアル．故ニ Ω ハ N ノ prime ideal ノ集合ト考ヘテヨリ，Wallman ノ表現ト Stone ノ表現トハ一致スル）

故 $x\in L$ ニ対シテ

$$f_x(\mathfrak{Z}^*)=g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda\in\mathfrak{Z}^*)=l.u.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda\notin\mathfrak{Z}^*)$$

ヲ対應セシメルトキハ，§1 ニ於ケルが如ク次ノ定理ヲ証明スルコトが出来ル。

定理 2.2　unit ノ存在ヲ假定シナイ Archimedean vector lattice L ハ，Ω ニ於ケル連続函数 $f_x(\mathfrak{Z}^*)$ $(x\in L)$ ノ system L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル．又 $f_x(\mathfrak{q}^*)$ が無限大ナル点 $\mathfrak{q}^*$ ノ集合ハ非稠密デア

ル。

コノ節ノ方法ハ L ガ unit e ヲ有スル場合ニモ勿論適用出来ルガ，§1 ノ方法ガ L ノ principal ideal デ作ッタ distributive lattice P ノ媒介トシテ居ルニ反シ，コヽデハ L ノ normal ideal デ作ッタ Boolean algebra N ヲ媒介トシテ居ル点ガ異ル。

§3. 次ニ L ガ σ-complete 或ハ complete デアッテ unit e ヲ有スル場合ノ表現ヲ考ヘル。Birkhoff, Lattice theory, P. 106 カラ L ハ Archimedean デアル。コノトキハ y ノ principal ideal $\mathfrak{a}(x)$ ヘノ projection $P_{\mathfrak{a}(x)}y = \bigvee_n (y_+ \wedge nx) - \bigvee_n (y_- \wedge nx)$ ガ考ヘラレルカラコレヲ用フレバ次ノ定理ガ証明出来ル。

定理3.1 unit e ヲ有スル σ-complete（或ハ complete）vector lattice L ノ principal ideal ノ全体 P ハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra デアル。(1)

定理1.4 ヨリ L ハ唯ノ vector lattice トシテ，連續函数ノ system L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル。(1') シカシ σ-complete（或ハ

（脚註1ハ次頁へ）

---

(1) unit e ガ存在シナイトキハ conditionally σ-complete（或ハ conditionally complete）Boolean algebra トナル。

complete) vector lattice トシテ lattice-isomorphic デアルトハ云ヘナイ。コノタメニハ Ω = measure ヲ導入スル。$\mathfrak{a} \in \mathrm{P}$ ナルトキ $e(\mathfrak{a}) = F_{\mathfrak{a}} e$ トオクトキハ $e(\mathfrak{a})$ ハ P ニ於テ定義セラレタ countably (或ハ completely) additive function デアル。$\mathfrak{a}$ ノ表現ヲ $\mathfrak{a}^*$ トシ、$e(\mathfrak{a}^*) = e(\mathfrak{a})$ トオケバ、$e(\mathfrak{a}^*)$ ハ P ノ表現 P^* ニ於テ定義セラレタ additive function デアル。$\mathfrak{x}^*$ ヲ Ω ノ一集合トスルトキ countable (或ハ directed) set $\mathfrak{a}_\delta, \mathfrak{b}_\delta \in \mathrm{P}$, $\omega_\delta \in L$ ガアッテ、$\omega_\delta \to 0$ ニシテ

$$\mathfrak{a}_\delta^* \leqq \mathfrak{x}^* \leqq \mathfrak{b}_\delta^*, \quad e(\mathfrak{b}_\delta - \mathfrak{a}_\delta) \leqq \omega_\delta$$ [(1)]

ガ成立スルトキ、$\mathfrak{x}^*$ ハ可測ナリト云ヒ、$e(\mathfrak{a}_\delta)$, $e(\mathfrak{b}_\delta)$ ノ共通ノ極限 $e(\bigvee_\delta \mathfrak{a}_\delta) = e(\bigwedge_\delta \mathfrak{b}_\delta)$ ヲ $e(\mathfrak{x}^*)$ ニテアラハス。シカルトキハ次ノコトガ成立スル。

定理3.2　可測集合ノ全体 $\overline{\mathrm{P}^*}$ ハ field ヲ作リ、measure $e(\mathfrak{x}^*)$ ハ $\overline{\mathrm{P}^*}$ ニ於テ finitely additive デアル。シカシ measure zero ノ集合ヲ無視スレバ、$\overline{\mathrm{P}^*}$ ハ σ-(或ハ complete) field デアッテ、$e(\mathfrak{x}^*)$ ハ $\overline{\mathrm{P}^*}$ ニ於テ countably (或ハ completely) additive

---

(1') $\mathfrak{b}_\delta - \mathfrak{a}_\delta$ ハ $\mathfrak{b}_\delta$ ニ於ケル $\mathfrak{a}_\delta$ ノ relative complement ヲ示ス。

(1) L ガ σ-complete ノ場合ハ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ中野秀五郎氏ノ relative spectrum ニナッテ居ル。(H. Nakano, spektraltheorie, 数物記事 23 (1941), 491参照)

デアル．尚 P ト $\overline{\mathrm{P}}^*$ トハ σ－（或ハ complete）Boolean algebra トシテ lattice-isomorphic デアル．（即 I^* ヲ measure zero ノ集合ガ作ル $\overline{\mathrm{P}}^*$ ノ ideal トスレバ P ト $\overline{\mathrm{P}}^*/\mathrm{I}^*$ トハ σ－（或ハ complete）Boolean algebra トシテ lattice-isomorphic デアル）

コノ measure ノ概念ヲ用ヒレバ次ノ様ニ云ヘル。

定理3.3　measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，unit e ヲ有スル σ-complete（或ハ complete）vector lattice L トソノ表現 L^* トハ σ-complete（或ハ complete）vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic デアル．又 $f_y(\mathfrak{z}^*)$ ヲ y ノ表現トスレバ

$$y=\int_{\Omega} f_y(\mathfrak{z}^*)\,de(\iota^*) \qquad (1)$$

デアル。

即チ $y=\bigvee_\nu y_\nu$ ノ表現ハ measure zero ノ集合ニ属スル点ヲ除ケバ $f_y(\mathfrak{z}^*)=\max_\nu[f_{y_\nu}(\mathfrak{z}^*)]$ デアリ，meet ノ場合モ同様ノコトガ成立スル。

(1) ハ Freudenthal ノ得タ式

$$y=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,de(\alpha_\lambda^{(y)}) \qquad (2)$$

ニ對應スル．(2) ハ前著 F. Maeda, Partially ordered linear space（廣島文理大紀要，10巻（1940），137-150）ニ於テハ，L ガ complete デ regular デアル場合ニ，

equivalence class A_x ($x \sim z$ ナルガ如キ z ノ集合)ヲ用ヒテ証明シタガ, $x \sim z$ ナルコトト $\mathfrak{a}(x)=\mathfrak{a}(z)$ ナルコトトハ同等デアルカラ, equivalence class ノ全体ト principal ideal ノ全体 $\mathbf{P}$ トハ lattice-isomorphic デアル。故ニ前者ト大略同様ニシテ, L ガ σ-complete デアル場合ニ, characteristic family $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}\}$ ヲ用ヒテ, (2) ヲ証明スルコトガ出来ル.

コノ measure ヲ導入スル方法ハ, unit e ガ存在シナイトキデモ, L ガ complete デアルトキハ同様ニ云ヘル. normal ideal $\mathfrak{a}$ ガ與ヘラレタルトキ, 任意ノ $y \in L$ ニ對シテ $\bigvee(y_+ \wedge x\,;\, x \in \mathfrak{a}) - \bigvee(y_- \wedge x\,;\, x \in \mathfrak{a})$ ガ存在スルカラ, コノ値ヲ y ノ $\mathfrak{a}$ ヘノ projection トシ, $P_{\mathfrak{a}}y$ トアラハス。

§2 ノ如ク $L=\bigvee_{\alpha} \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ ニ分割スルトキハ, $\mathfrak{a} \in \mathbf{N}$ ニ對シテ $e(\mathfrak{a})=\bigvee_{\alpha} P_{\mathfrak{a}} e^{(\alpha)}$ ト定義スル. 但シ $\bigvee_{\alpha} P_{\mathfrak{a}} e^{(\alpha)}$ ガ存在シナイトキハ $e(\mathfrak{a})=+\infty$ ト考ヘル. シカルトキハ $e(\mathfrak{a})$ ハ $\mathbf{N}$ ニ於テ completely additive デアル。前ノ $\mathbf{P}$ ノ代リニ $\mathbf{N}$ ニ對シテ, 同様ノ方法ヲ行ヘバ, measure ガ導入出来ル.

但シコノトキハ measure ガ $+\infty$ ノトキモ出来ルガ, コレハ差支ヲ生ジナイ。

故ニ定理3.3ノ如ク, measure zero ノ集合ヲ無視スレバ, unit ヲ有シナイ場合モ, complete vector lattice L トソノ表現 L^* トハ, complete vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic デアル。

尚 L が complete vector lattice デアルトキハ、**N** ハ Bochner and Phillips, Additive set functions and vector lattices, Annals of math. 42(1941), 316-324 ニ於ケル (complete) normal subspace ノ全体 **B** ト同一デアル。